**Міністерство освіти і науки України**

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ**

**“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”**

**Кафедра прикладної математики**

**ЕТАП №2**

«Вивчення методу розв’язування задачі

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ  РОБОТИ»

з дисципліни: «Програмування-1»

на тему: «Програма обчислення визначених інтегралів (формули трапецій)»

Виконав: Задорожний Богдан Юрійович.

Група КМ-02, факультет ФПМ

Керівник: Олефір О.С.

**Київ-2020**

**Програма обчислення визначених інтегралів (формули трапецій)**

**Інтеграл** — центральне поняття інтегрального числення, узагальнення поняття суми для функції, визначеній на континуумі. Виникає під час розв'язування задач про знаходження площі кривої, знаходження пройденого шляху при нерівномірному русі та інших подібних задачах.

**Визначений інтеграл** — в математичному аналізі це інтеграл функції з вказаною областю інтегрування. Визначений інтеграл є неперервним функціоналом, лінійним по підінтегральним функціям і адитивним по області інтегрування. У найпростішому випадку область інтегрування — це відрізок числової осі. Геометричний зміст визначеного інтеграла — це площа криволінійної фігури (криволінійної трапеції), обмеженої віссю абсцис, двома вертикалями на краях відрізка і кривою графіка функції.

**Чисельне інтегрування**

Якщо для визначеної і неперервної на проміжку [а;b] функції f(x) відома первісна F(х), то визначений інтеграл  можна обчислити за формулою Ньютона-Лейбніца:

.

Проте в багатьох випадках обчислити визначений інтеграл за цією формулою неможливо, оскільки знайти первісну F(x) через елементарні функції, як правило, не вдається. Навіть тоді, коли її можна визначити, вона часто має досить складний і незручний для обчислень вигляд. Крім того, на практиці підінтегральна функція часто задається таблично і в такому разі аналітичні методи просто незастосовні. У цих випадках для обчислення визначених інтегралів користуються чисельними методами. Чисельне інтегрування – це обчислення значення визначеного інтеграла через ряд значень підінтегральної функції та її похідних.

Оскільки знаходження числового значення визначеного інтеграла  (якщо *f*(*x*)>0) з геометричного погляду можна тлумачити як обчислення площі криволінійної трапеції (її квадратури), обмеженої віссю Ox, прямими *x*=*a*, *x*=*b*, і лінією *y*=*f*(*x*), то формули для наближеного обчислення визначеного інтеграла називаються квадратурними.

Для побудови квадратурних формул можна використати інтерполяційний многочлен, а саме: підінтегральну функцію *y*=*f*(*x*) на відрізку інтегрування замінити інтерполяційним многочленом *Pn*(*x*) і вважати, що інтеграл від інтерполяційного многочлена наближено дорівнює інтегралу від заданої функції



Якщо для інтерполяційного многочлена відомий залишковий член *Rn*(*x*)=*f*(*x*)-*Pn*(*x*), то можна дістати вираз для залишкового члена квадратурної формули , тобто залишковий член квадратурної формули дорівнює інтегралу від залишкового члена інтерполяційного многочлена.

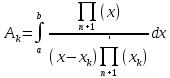
**Квадратурні формули Ньютона-Котеса**

Розглянемо інтерполяційні квадратурні формули, в яких вузли *xk* ∈[а;b] рівновіддалені. Такі формули називаються формулами Ньютона-Котеса. Їх вперше розглянув Ньютон, а коефіцієнти для них при *n*≤9 знайшов Котес. Дослідження таких, формул показали, що коли *n*≥10, то серед коефіцієнтів *Ak* є від’ємні і . Отже, при великих n похибка квадратурної суми буде великою навіть при малих похибках в значеннях функції *f*(*xk*). Тому на практиці квадратурні формули Ньютона-Котеса для великих n не використовуються. Розглянемо частинні випадки формул Ньютона-Котеса.

Вважатимемо, що для формул Ньютона-Котеса, які містять не менш як два доданки (*n*≥1), вузли *xk* розміщено такі що *x*0=*a*, *xn*=*b*, *xk*+1=*xk*+*h* (*k*=0,1,…,*n*-1).

Крок *h* в даному випадку дорівнює  . У випадку *n*=0 за єдиний вузол *x*0 можна взяти будь-яку точку на відрізку [*а*;*b*].

**Квадратурна формула трапеції.**

Розглянемо випадок квадратурної формули Ньютона-Котеса, яка має два вузли *x*0=*a* і *xn*=*b* (*n*=1). Коефіцієнти *Ak* (*k*=0,1) знаходимо з формули :

;

;

Тоді формула  набирає вигляду:

 .

Ми дістали квадратурну формулу, замінивши функцію *f*(*x*) інтерполяційним многочленом першого степеня (лінійна інтерполяція), який в точках *x*=*a* і *x*=*b* набуває відповідно значень *f*(*a*) і *f*(*b*). Ця формула називається квадратурною формулою трапецій.

**Узагальнена квадратурна формула трапецій.**

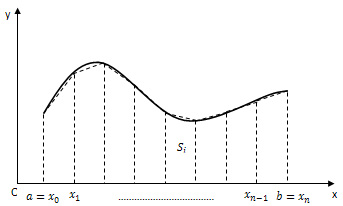
Якщо відрізок [*а*;*b*] великий, то й похибка квадратурної формули трапеції може бути великою. Щоб зменшити її, поділимо відрізок інтегрування [*а*;*b*] на *m* рівних частин: [*x*0;*x*1], [*x*1;*x*2],..., [*xm*-1;*xm*], завдовжки причому *x*0=*a*, *xm*=*b*. Тоді . До кожного з *m* інтегралів застосуємо квадратурну формулу трапецій. Дістанемо:

,

де *yi*=*f*(*xi*). Ця формула називається узагальненою формулою трапецій.

**Обчислення визначених інтегралів методом трапецій**

В основну ідею методу трапецій покладено заміну кривої підінтегральної функції на ламану. Цього можна досягнути наступним чином. Розділимо проміжок [а;b] на n рівних частин (довжина кожної частинки рівна h=(b - a)/n ), і сполучимо прямими лініями значення функцій на кінцях відрізків, тобто площу криволінійної трапеції наближено замінюємо на суму площин n трапецій.



Графічне представлення методу трапецій

Площа однієї такої трапеції можна обчислити за формулою:

313

А загальна площа *S* всіх *n* трапецій і відповідно наближене **значення інтегралу** дорівнює:

411

Якщо підставити граничні значення проміжку обчислення інтеграла, то формула набуде наступного вигляду:

510.